

For nonautonomous differential inclusions the concept of limiting differential inclusions is entered, their properties are studied, properties such as invariancy ω -limiting sets of solutions are investigated and the analogue of the principle of invariancy LaSalle by use of Lyapunov's functions with constant signs a derivative is established. The method of researches equally can be applied to the differential equations and under corresponding assumptions leads to known results.

Key words: limiting differential inclusion; nonautonomous system; semiinvariant set; Lyapunov's function; a principle of invariancy.

УДК 517.977.5

О ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ НА БЕСКОНЕЧНОМ ПРОМЕЖУТКЕ С МОНОТОННОЙ ДИНАМИКОЙ

© Д.В. Хлопин

Ключевые слова: задача управления; задача на бесконечном промежутке; необходимые условия оптимальности; краевое условие на бесконечности; принцип максимума Понтрягина; монотонность.

В задачах управления на бесконечном промежутке для оптимального управления не существует удобного краевого условия на бесконечности, необходимого для его оптимальности. Задачи с монотонными по x правой частью и целевой функцией обычно более просты для исследования; работы последних лет показали, например, что удовлетворяющая соотношениям принципа максимума сопряженная переменная в таких задачах сохраняет знак. Для существенного класса таких задач удастся предъявить для такой сопряженной переменной как краевое условие, так и конкретную формулу. В докладе предполагается обсудить возможность переноса этого условия на произвольные задачи с монотонной правой частью.

В задачах управления на бесконечном промежутке времени

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x(0) = 0, \quad u \in U(t), \quad J[x, u](t) \triangleq \int_0^t g(t, x, u) dt \overset{T \rightarrow \infty}{\rightsquigarrow} \max$$

принцип максимума Понтрягина (ПМП) является необходимым условием оптимальности, однако сам он не содержит (см. [1, § 6]) удобного условия на выбор сопряженной переменной.

Для оптимального процесса (u^0, x^0) рассмотрим набор краевых задач

$$\dot{x}_n = \frac{\partial H}{\partial \psi}, \quad x_n(0) = \xi_n, \quad \dot{\psi}_n = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \psi_n(\tau_n) = 0, \quad \lambda_n > 0, \quad \lambda_n + \|\psi_n(0)\| = 1,$$

где $H = \psi f(t, x, u^0(t)) + \lambda g(t, x, u^0(t))$. Дополнительным необходимым условием оптимальности является существование для некоторых $\xi_n \rightarrow 0, \tau_n \rightarrow \infty$ у решений этих задач предела (x^0, λ^0, ψ^0) , удовлетворяющего условию максимума. Назовем эти пределы *исчезающими решениями* ПМП. Такое необходимое условие оптимальности впервые было выделено в [2, Theorem 9.1]; общий случай в [3, Theorem 2]. Его использование значительно упрощается, если найдется исчезающее решение со свойством $x_n \equiv x^0$, назовем его *строгим* [4].

Если функции f, g всюду монотонно не убывают по x , то обязано существовать решение ПМП с $\psi \succ 0$, в частности таковы все исчезающие решения (см. [5], [1, § 10], [6, § 5], [3, § 4.3]). Если также функция f биаффинна, то в условиях [1, § 11] для оптимальности необходимо:

$$\psi^0(0) = \int_0^\infty \frac{\partial g}{\partial x}(t, x^0(t), u^0(t)) A^0(t) dt, \quad (1)$$

где A^0 — матрица Коши вдоль x^0 . В [6, замечание 3] поставлен вопрос: будет ли равенство (1) необходимо для оптимальности, если f, g не убывают по x . Отметим, что для таких задач равенство (1) эквивалентно существованию строгого исчезающего решения.

Приведем пример, уточняющий этот вопрос.

$$\dot{x} = x + u, x(0) = 0; u \in [0, 1], \quad J[x, u](T) = \int_0^T e^{-2t} x(1 - x^4) dt \rightarrow \max.$$

Покажем, что $(x^0, u^0) \equiv (0, 0)$ оптимально. Для всякой другой допустимой пары (x, u) в некоторый момент T выполнено $x(T) = 1$. Тогда при $0 < t_1 \leq T \leq t_2$, $x(t_1) \leq e^{t_1 - T}$, $2e^{t_2 - T} - 1 \geq x(t_2) \geq e^{t_2 - T}$, откуда $J[x, u](t_1) \leq J[x, u](T) \leq \int_0^{t_1} e^{-t_1 - T} dt < e^{-T} \leq e^{-t_1}$ и

$$J[x, u](t_2) < e^{-T} + \int_T^\infty 2e^{-t - T} dt - \int_T^{t_2} e^{3t - 5T} dt \leq \frac{10}{3}e^{-T} - \frac{1}{3}e^{3t_2 - 5T} \leq \frac{8\sqrt[4]{2}}{3}e^{-3t_2/4}.$$

Итак, при всех $t \geq 0$ имеется общая оценка: $J[x, u](t) < \frac{10}{3}e^{-3t/4}$; более того, для каждого ненулевого решения $\lim_{t \rightarrow \infty} J[x, u](t) = -\infty$. Отсюда следует, что $(x^0, u^0) \equiv (0, 0)$, для которого $J[x^0, u^0] \equiv 0$, является равномерно обгоняющим оптимальным решением [7].

Для пары $(x^0, u^0) \equiv (0, 0)$, у всякого решения ПМП, $u^0 \equiv 0$ максимизирует гамильтониан только при $\psi^0 \leq 0$. Но ψ^0 удовлетворяет уравнению $\dot{\psi} = -\psi - \lambda e^{-2t}$, решения которого либо сохраняют знак, либо в одной точке меняют знак с «+» на «-», либо $\psi \equiv 0, \lambda = 0$. Теперь из $\psi^0 \leq 0$ имеем $\psi^0(t) < 0$ при $t > 0$ для всякого нетривиального решения ПМП.

Можно показать, что исчезающими решениями здесь будут лишь $x^0 \equiv 0, \psi^0 = -e^{-t} + e^{-2t}, \lambda^0 = 1$ и $x^0 \equiv 0, \psi^0 = -e^{-t}, \lambda^0 = 0$. Покажем, что нет строгих исчезающих решений. Если $\psi_n(\tau_n) = 0$, то, как показано выше, $\psi_n(t) > 0$ при $t < \tau_n$. В силу $\tau_n \rightarrow \infty$ предел решений ψ_n , т. е. ψ^0 , всюду неотрицателен. Но $\psi^0(t) < 0$ при $t > 0$ у всякого нетривиального решения ПМП. Следовательно, строго исчезающих решений нет.

Данный пример полностью удовлетворяет всем условиям [6, Теорема 5], [3, Corollary 7] кроме одного: g монотонно не убывает лишь в круге заданного радиуса от оптимального решения. Этого оказалось достаточно, чтобы в решениях ПМП отсутствовала неотрицательная сопряженная переменная, не существовало строгих исчезающих решений, не обеспечивалось равенство (1). Таким образом, на вопрос из [6, Замечание 3] ответ отрицательный, если условие монотонности считать выполненным лишь в окрестности оптимального решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Асеев С.М., Кряжиский А.В. Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста // Труды МИ РАН. 2007. Т. 257. С. 1-271
2. Seierstad A. Necessary conditions for nonsmooth, infinite-horizon optimal control problems. J. Optim. Theory Appl. 1999. V. 103. N 1. P. 201-230.
3. Khlopin D.V. Necessity of vanishing shadow price in infinite horizon control problems // arXiv: 1207.5358. 33 p.
4. Хлопин Д.В. Краевые условия на бесконечности для сильно оптимального управления // Вестник Удмуртского университета. Математика, Механика. Компьютерные науки. 2013. № 1. С. 49-58.

5. Асеев С.М., Кряжиский А.В., Тарасьев А.М. Принцип максимума Понтрягина и условия трансверсальности для одной задачи оптимального управления на бесконечном интервале // Труды МИ РАН. 2001. Т. 233. С. 64-80.

6. Асеев С.М., Бесов К.О., Кряжиский А.В. Задачи оптимального управления на бесконечном промежутке времени в экономике // Успехи мат. наук. 2012. Т. 67. № 2. С. 3-64.

7. Carlson D., Haurie A., Leizarowitz A. Infinite Horizon Optimal Control. Deterministic and Stochastic Systems. Berlin: Springer, 1991.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа частично поддержана программой Президиума РАН «Математическая теория управления» и грантами РФФИ №№ 12-01-31172, 13-01-90414.

Khlopin D.V. ON INFINITE-HORIZON CONTROL PROBLEMS WITH MONOTONIC RIGHT-HAND SIDE

No boundary condition at infinity that is a necessary condition of optimality is known for infinite-horizon control problems. If the right-hand side and objective function are monotonic in x , the problem often becomes easier to investigate; for example, in the recent papers it was shown that in such problems the adjoint variable that satisfies the Pontryagin Maximum Principle does not change its sign. For a significant class of such problems it is possible to find, for such an adjoint variable, both the boundary condition and explicit formula. In our report, we plan to discuss the possibility of transferring this condition onto arbitrary problems with the monotonic right-hand side.

Key words: control problem; infinite horizon problem; necessary conditions of optimality; transversality condition for infinity; Pontryagin maximum principle; monotonic objective function.

УДК 532.522.2:532.631, 532.66

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СПЛОШНОЙ ЧАСТИ ЛАМИНАРНОЙ КАПИЛЛЯРНОЙ СТРУИ

© И.М. Цун

Ключевые слова: ламинарная капиллярная струя; сплошная и капельная части струи; устойчивый и неустойчивый участки сплошной части струи; моделирование методом подобия.

Рассматривается струя жидкости, отделенная от окружающего пространства поверхностью раздела, вдоль которой действуют силы поверхностного натяжения, причем действие этих сил соизмеримо с действием других сил на струю (капиллярная струя); получены и проанализированы экспериментальные зависимости.

Вопросам экспериментального изучения капиллярных струй посвящен целый ряд работ (например, 1–5), в т. ч. работы таких выдающихся исследователей, как Дж.В. Стретт (лорд Рэлей) [2, 3] и Нильс Бор [4, 5]. Анализ литературных данных, а также результаты наших исследований показывают, что по длине капиллярной струи существуют сплошная, непрерывная её часть и участок, в пределах которого струя представляет собой поток капель (капельный участок). В пределах сплошной части можно выделить два участка: неустойчивый, прилегающий к капельному, на котором зарождаются и развиваются неустойчивые возмущения поверхности, приводящие к распаду струи, и устойчивый, по длине которого такие возмущения отсутствуют. Точку сплошной части струи, наиболее удаленную от сопла, из которого происходит истечение, назовём вершиной струи.